Institut National Polytechnique

Cycle Préparatoire - 1ère année

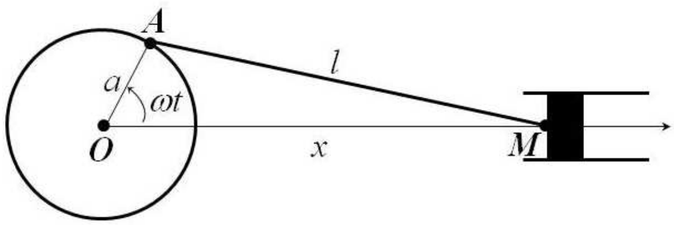
Examen de Mécanique 1 du 16 décembre 2011, durée : 1 h 30

Aucun document n'est autorisé ; les calculatrices sont autorisées.

On rappelle que les correcteurs sont sensibles à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel -en aucun cas- ne doit être télégraphique.

1. QUESTIONS DE COURS
   Soit R' un repère non galiléen, et R un repère galiléen.
   (a) Donner la définition d'un repère galiléen, et citer des exemples.
   (b) Donner la définition mathématique de :
      i. la vitesse d'entraînement,
      ii. l'accélération d'entraînement,
      iii. l'accélération de Coriolis.
   (c) Donner la loi de composition des vitesses et des accélérations.

2. RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE
   Une roue, de rayon a tourne uniformément avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz d'un référentiel galiléen dans lequel Oy représente la verticale ascendante. Une barre de longueur l, articulée en un point A de la roue, communique un mouvement de translation selon Ox à un piston M de masse m, que l'on considèrera ponctuel (figure ci-dessous). On suppose que le mouvement de M s'effectue sans frottement.



   On note $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}})$, et H la projection de A sur Ox.
   (a) Exprimer la longueur HA en fonction de ωt.
   (b) Exprimer les longueurs HA et HM en fonction de α.
   (c) En déduire l'expression de $x = OM$ en fonction de a, l, ω et t.
   (d) Réaliser le bilan des forces s'appliquant sur le piston, puis appliquer la relation fondamentale de la dynamique au piston.
   (e) En déduire l'expression de la composante suivant Ox de la force qu'exerce la barre sur le piston, et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$F_x = -ma\omega^2\{\cos\omega t + \frac{al^2\cos 2\omega t + a^3\sin^4\omega t}{(l^2 - a^2\sin^2\omega t)^{3/2}}\}.$$

   On utilisera la relation trigonométrique cos $2\alpha = \cos^2\alpha$ - $\sin^2\alpha$.

(f) Donner l'expression de la valeur approchée de F_x dans le cas où $(a\ /\ l) \ll 1$.

(g) Avec les approximations de la question précédente, quelle est alors la loi de variation $x(\mathrm{t})$? On suppose pour cela qu'à l'instant initial A $\in [OM]$.

3. INTERACTION NEWTONIENNE ENTRE DEUX PARTICULES

On désigne par M la masse de la Terre (centre T) et par m celle d'un satellite artificiel (centre S), avec $m \ll M$. On note C la constante des aires, R le rayon de la Terre, G la constante de gravitation et g_0 le champ de gravitation à la surface de la Terre. Soit z l'altitude (comptée par rapport à la surface terrestre) d'un point quelconque de l'orbite du satellite. La seule force s'exerçant sur S prise en compte dans le problème est la force d'interaction avec la Terre. T et S sont considérés comme ponctuels.

(a) Déduire de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à S immobile en $z = 0$, l'expression liant g_0 et G, ainsi que d'autres données de l'énoncé.

(b) Déduire du théorème du moment cinétique appliqué au satellite à l'altitude z, l'expression de C. On rappelle que C correspond au moment cinétique massique de S. Expliquer pourquoi le mouvement de S peut-être décrit par les coordonnées r et θ que l'on représentera sur un schéma.

(c) Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction des données de l'énoncé et de la variable $u = \frac{1}{TS}$. Pour se faire, on posera $u = \frac{1}{r}$ puis on exprimera $\frac{du}{d\theta}$ en fonction de $\frac{dr}{d\theta}$.

(d) Appliquer le théorème de la puissance mécanique et en déduire l'équation de la trajectoire du satellite. Exprimer le paramètre p et l'excentricité e de la conique en fonction de R, C, g_0 et d'une constante.

(e) On note z_A et z_P l'altitude de l'apogée (A) et du périgée (P). Représenter l'allure de la trajectoire de S, et préciser les positions de A et P.

(f) Déterminer les expressions de z_A et z_P en fonction de R, p et e.

(g) Sachant que $R = 6{,}39\ 10^3$ km, $z_A = 5{,}65\ 10^3$ km et $z_P = 0{,}95\ 10^3$ km, déterminer la valeur de p, e, ainsi que du demi-grand axe a.

(h) Sachant que $p = \frac{b^2}{a}$ et que l'aire de la conique décrite par S vaut πab, avec b la longueur du demi-petit axe. Déterminer l'expression puis la valeur numérique de la période du satellite. On prendra $g_0 = 9{,}8$ m s^{-2}.